

ОБ ОДНОМ КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

Аннотация. Получены критерии устойчивости решений нелинейных дифференциальных уравнений с последействием в банаховых пространствах. Приводимые критерии справедливы как в регулярном, так и в критических случаях.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения с последействием, критерии устойчивости, банаховы пространства.

Abstract. The article introduces criteria of solution stability of differential equations with aftereffect. These criteria are valid in the regular and singular cases.

Key words: differential equations with aftereffect, criteria of stability, Banach space.

Введение

Устойчивость решений дифференциальных уравнений с последействием исследовалась многими авторами [1–3]. При этом большое внимание уделялось исследованию устойчивости решений уравнений с последействием в критических случаях [4].

В работах [5, 6] предложен метод исследования устойчивости решений систем нелинейных дифференциальных уравнений в критическом случае одного нулевого корня, основанный на исследовании спектра якобиана правой части уравнения в окрестности возмущенного решения. В работах [7, 8] он распространен на дифференциальные и разностные уравнения в банаховых пространствах и на всевозможные критические случаи. При этом вместо спектров операторов исследуются логарифмические нормы и спектры действительных частей множества специальным образом построенных матриц. Аналогичный подход использован в статьях [9, 10] при исследовании устойчивости решений систем нелинейных дифференциальных уравнений с последействием. Эти результаты подытожены в книге [11]. Ниже эти результаты распространяются на дифференциальные уравнения с последействием в банаховых пространствах. Приводимые критерии устойчивости справедливы как в регулярных, так и в критических случаях.

Приведем обозначения, используемые в статье. Пусть X – банахово пространство, K – оператор, действующий из X в X . Тогда $B(a, r) = \{x, a \in X : \|x - a\| \leq r\}$, $S(a, r) = \{x, a \in X : \|x - a\| = r\}$, $\Lambda(K)$ – логарифмическая норма линейного оператора K , определяемая [12] выражением

$$\Lambda(K) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{\|I + hK\| - 1}{h}.$$

1. Устойчивость решений автономных систем с запаздыванием

Рассмотрим в банаховом пространстве X уравнение

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + B(x(t - \eta)). \quad (1)$$

Здесь $A \in [X, X]$ – линейный ограниченный оператор, действующий из X в X ; $B(x)$ – нелинейный оператор, действующий из банахова пространства X в X , причем $B(0) = 0$.

Будем считать выполненным условие

$$\|B(x)\| \leq \beta \|x\|. \quad (2)$$

Исследуем устойчивость тривиального решения уравнения (1). Дадим функции $x(t)$ возмущение

$$x(t) = \psi(t), \quad -\eta \leq t < 0, \|\psi(t)\|_{C[-\eta, 0]} = \delta. \quad (3)$$

Из условия (3) следует, что в момент времени $t_0 = 0$ возмущение

$$x(0) = \psi(0) = x_0, \quad \|x_0\| \leq \delta. \quad (4)$$

Рассмотрим задачу Коши (1), (4) при условии (3). Обозначим через $x(t, x_0)$ траекторию решения задачи Коши (1), (4).

При $0 \leq t \leq \eta$ решение задачи Коши (1), (4) представимо в виде

$$x(t) = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)} B(\psi(s-\eta)) ds.$$

Переходя к нормам, имеем

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq e^{\Lambda(A)t} \|x_0\| + \int_0^t e^{\Lambda(A)(t-s)} \beta \delta ds \leq \\ &\leq e^{\Lambda(A)t} \left(\delta + \int_0^t e^{-\Lambda(A)s} \beta \delta ds \right) = \delta \left(e^{\Lambda(A)t} + \frac{\beta}{\Lambda(A)} - \frac{\beta}{\Lambda(A)} e^{\Lambda(A)t} \right). \end{aligned}$$

Так как логарифмическая норма $\Lambda(A) < 0$, то отсюда имеем

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq \delta \left(e^{\Lambda(A)t} - \frac{\beta}{|\Lambda(A)|} (1 - e^{\Lambda(A)t}) \right) = \\ &= \delta \left(e^{\Lambda(A)t} + \frac{\beta}{|\Lambda(A)|} \left(\frac{\Lambda(A)t}{1!} + \frac{(\Lambda(A)t)^2}{2!} + \dots \right) \right) \leq \\ &\leq \delta \left(e^{\Lambda(A)t} - \beta \left(\frac{t}{1!} - \frac{|\Lambda(A)| t^2}{2!} + \dots \right) \right) \leq \delta_*, \end{aligned}$$

где

$$\delta_* = \delta \max_{0 \leq t \leq \eta} \left(e^{\Lambda(A)t} - \beta \left(\frac{t}{1!} - \frac{|\Lambda(A)| t^2}{2!} + \dots \right) \right).$$

Докажем, что при выполнении условия $\Lambda(A) + \beta < 0$ траектория $x(t, x_0)$ решения задачи Коши (1), (4) с возмущением (3) не покидает шара $B(0, \delta_0)$, $\delta_* < \delta_0 \leq 2\delta_*$. Предположим противное. Пусть в момент времени T траектория решения задачи Коши достигает сферы $S(0, \delta_0)$ и при $t > T$ покидает шар $B(0, \delta_0)$. Пусть существует промежуток $[T, T + \Delta T]$, в течение которого значения $x(t)$ находятся вне шара $B(0, \delta_0)$, но при этом значения $x(t - \eta)$ остаются в открытом шаре $B(0, \delta_0) \setminus S(0, \delta_0)$.

Тогда при $T \leq t \leq T + \Delta T$ решение задачи Коши (1), (4) может быть представлено в виде

$$x(t) = e^{A(t-T)}x(T) + \int_T^t e^{A(t-s)}B(x(s-\eta))ds. \quad (5)$$

Отметим, что так как в момент времени T траектория $x(t, x_0)$ впервые достигает сферы $S(0, \delta_0)$, то $\|x(s - \eta)\| < \delta_0$ при $0 \leq s \leq T$.

Переходя к нормам, имеем

$$\|x(t)\| \leq e^{\Lambda(A)(t-T)}\|x(T)\| + \int_T^t e^{\Lambda(A)(t-s)}\beta\|x(s-\eta)\|ds. \quad (6)$$

Так как $\|x(s - \eta)\| < \delta_0$ при $0 \leq t \leq T + \Delta T$, то в промежутке времени $[T, T + \Delta T]$

$$\|x(t - \eta)\| \leq \|x(T)\| < \|x(t)\|.$$

Продолжим с учетом этого замечания исследование неравенства (6). Очевидно, что

$$\|x(t)\| \leq e^{\Lambda(A)(t-T)}\|x(T)\| + \beta \int_T^t e^{\Lambda(A)(t-s)}\|x(s)\|ds. \quad (7)$$

Пусть $\varphi(t) = e^{-\Lambda(A)t}\|x(t)\|$. Тогда неравенство (7) можно представить в виде

$$\varphi(t) \leq \varphi(T) + \beta \int_T^t \varphi(s)ds. \quad (8)$$

Применяя к неравенству (8) неравенство Гронуолла – Беллмана [12], имеем

$$\varphi(t) \leq \varphi(T)e^{\beta(t-T)}.$$

Возвращаясь к нормам, имеем

$$\|x(t)\| \leq \exp\{(\Lambda(A) + \beta)(t - T)\}\|x(T)\|. \quad (9)$$

Из (9) следует, что если

$$\Lambda(A) + \beta < 0, \quad (10)$$

то $\|x(t)\| < \|x(T)\|$ при $t \in [T, T + \Delta T]$. Таким образом, получено противоречие, и в момент времени $t = T$ траектория решения задачи Коши (1), (4) не покидает шара $B(0, \delta_0)$.

Таким образом, при выполнении условия (10) доказана устойчивость задачи Коши (1), (4) при возмущении (3).

Теорема 1. Пусть логарифмическая норма оператора A отрицательна ($\Lambda(A) < 0$) и выполнено условие (10). Тогда решение задачи Коши (1), (4) при возмущении (3) устойчиво.

Исследуем асимптотическую устойчивость тривиального решения уравнения (1).

Дадим функции $x(t)$ возмущение (3) и рассмотрим задачу Коши (1), (4) при условии (3).

Как и выше, решение этой задачи представляется уравнением (5). Запишем решение при $t \geq \eta$ в виде

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^\eta e^{A(t-s)}g(s)ds + \int_\eta^t e^{A(t-s)}B(x(s-\eta))ds, \quad (11)$$

где $g(s) = B(x(s-\eta))$.

Перейдем в уравнении (11) к нормам:

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq e^{\Lambda(A)t} \|x_0\| + \beta \|\psi(t)\|_{C[-\eta, 0]} \int_0^\eta e^{\Lambda(A)(t-s)} ds + \\ &+ \beta \int_\eta^t e^{\Lambda(A)(t-s)} \|x(s-\eta)\| ds \leq e^{\Lambda(A)t} \delta_0 + \beta \int_\eta^t e^{\Lambda(A)(t-s)} \|x(s-\eta)\| ds \leq \\ &\leq e^{\Lambda(A)t} \delta_0 + \beta \int_0^{t-\eta} e^{\Lambda(A)(t-s-\eta)} \|x(s)\| ds \leq \\ &\leq e^{\Lambda(A)t} \delta_0 + \beta \int_0^t e^{\Lambda(A)(t-s-\eta)} \|x(s)\| ds. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь $\delta_0 = \left(\|x_0\| + \frac{\psi_0 \beta}{\Lambda(A)} (1 - e^{-\Lambda(A)\eta}) \right)$, $\psi_0 = \|\psi(t)\|_{C[-\eta, 0]}$.

Введем функцию $\phi(t) = e^{-\Lambda(A)t} \|x(t)\|$ и представим неравенство (12) в виде

$$\phi(t) \leq \delta_0 + \beta e^{-\Lambda(A)\eta} \int_0^t \phi(s) ds \quad (13)$$

Воспользовавшись неравенством Гронуолла – Беллмана, имеем

$$\varphi(t) \leq \delta_0 \exp\{\beta e^{-\Lambda(A)\eta} t\}.$$

Возвращаясь к нормам, получаем оценку

$$\|x(t)\| \leq \delta_0 \exp\left\{\left(\Lambda(A) + \beta e^{-\Lambda(A)\eta}\right)t\right\}.$$

Из этого неравенства следует, что при выполнении условий $\Lambda(A) < 0$ и

$$\beta e^{\Lambda(A)\eta} < |\Lambda(A)| \quad (14)$$

тривиальное решение задачи Коши асимптотически устойчиво.

Теорема 2. Пусть логарифмическая норма оператора A отрицательна ($\Lambda(A) < 0$), и выполнены условия (2), (14). Тогда тривиальное решение уравнения (1) асимптотически устойчиво.

2. Устойчивость решений неавтономных систем с запаздыванием

Исследуем в банаховом пространстве X устойчивость тривиального решения уравнения

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + B(t, x(t-\eta)). \quad (15)$$

Дадим функции $x(t)$ возмущение

$$x(t) = \psi(t), \quad -\eta \leq t < 0, \quad \|\psi(t)\|_{C[-\eta, 0]} \leq \delta. \quad (16)$$

Пусть при любом t выполняются условия

$$\Lambda(A(t)) \leq -\alpha(t), \quad \alpha(t) \geq \alpha > 0; \quad (17)$$

$$\|B(t, x(t))\| \leq \beta(t) \|x(t)\|, \quad -\alpha(t) + \beta(t) < 0, \quad (18)$$

где $\beta(t)$ – неубывающая функция.

Теорема 3. Пусть выполнены условия (17), (18). Тогда тривиальное решение уравнения (15) устойчиво.

Доказательство. Рассмотрим решение уравнения (15) при возмущении тривиального решения (16). Пусть

$$x(0) = \psi(0) = x_0, \quad \|x_0\| \leq \delta = \max_{-\eta \leq t \leq 0} |\psi(t)|. \quad (19)$$

Покажем, что в течение промежутка времени $0 \leq t \leq \eta$ траектория решения задачи Коши (15), (19) при возмущении (16) не покидает шара $B(0, \delta)$.

Предположим противное. Пусть в момент времени T , $0 < T < \eta$, траектория $x(t, x_0)$ задачи Коши покидает шар $B(0, \delta)$, проходя через точку x_* , и в течение промежутка времени $(T, T + \Delta T]$ $\|x(t)\| > \delta$. При $T \leq t \leq \eta$ решение задачи Коши (15), (19) при дополнительных условиях (16) можно записать в виде

$$\begin{aligned}
x(t) = & e^{A(T)(t-T)} x(T) + \int_T^t e^{A(T)(t-s)} (A(s) - A(T)) x(s) ds + \\
& + \int_T^t e^{A(T)(t-s)} B(T, \psi(s-\eta)) ds + \\
& + \int_T^t e^{A(T)(t-s)} (B(t, \psi(s-\eta)) - B(T, \psi(s-\eta))) ds. \quad (20)
\end{aligned}$$

Так как функция $A(t)$ непрерывна, то существует такой промежуток времени $T \leq t \leq T + \Delta T_1$ ($\Delta T_1 \leq \Delta T$), в течение которого $\|A(t) - A(T)\| \leq \varepsilon$, $\|B(t, \psi(s-\eta)) - B(T, \psi(s-\eta))\| \leq \varepsilon \|x(T)\|$.

Переходя в (20) к нормам, имеем при $t \in [T, T + \Delta T_1]$

$$\begin{aligned}
\|x(t)\| \leq & e^{\Lambda(A(T))(t-T)} \|x(T)\| + 2\varepsilon \int_T^t e^{\Lambda(A(T))(t-s)} \|x(s)\| ds + \\
& + \beta \int_T^t e^{\Lambda(A(T))(t-s)} \|\psi(s-\eta)\| ds \leq \\
\leq & e^{\Lambda(A(T))(t-T)} \|x(T)\| + 2\varepsilon \int_T^t e^{\Lambda(A(T))(t-s)} \|x(s)\| ds + \beta \delta \int_T^t e^{\Lambda(A(T))(t-s)} ds \leq \\
\leq & e^{\Lambda(A(T))(t-T)} \|x(T)\| + 2\varepsilon \int_T^t e^{\Lambda(A(T))(t-s)} \|x(s)\| ds + \\
& + \beta \int_T^t e^{\Lambda(A(T))(t-s)} \|x(s)\| ds = \\
= & e^{\Lambda(A(T))(t-T)} \|x(T)\| + \int_T^t e^{\Lambda(A(T))(t-s)} (2\varepsilon + \beta) \|x(s)\| ds. \quad (21)
\end{aligned}$$

Введем функцию $\varphi(t) = e^{-\Lambda(A(T))t}$. Тогда неравенство (21) представим в виде

$$\varphi(t) \leq \varphi(T) + \int_T^t (2\varepsilon + \beta) \varphi(s) ds.$$

Применяя неравенство Гронуолла – Беллмана и возвращаясь к нормам, имеем

$$\|x(t)\| \leq e^{(\Lambda(A(T)) + \varepsilon + \beta)(t-T)} \|x(T)\|.$$

Таким образом, при выполнении условия $\Lambda(A(T)) + \beta < 0$, траектория $x(t, x_0)$ при $t \in [0, \eta]$ не выходит из шара $B(0, \delta)$.

Покажем, что при $t \geq \eta$ траектория решения системы уравнений (15), (19) не покидает шара $B(0, \delta_*)$, $\delta_* = 2\delta$. Предположим противное. Пусть в момент времени T_1 траектория системы (15), (19) покидает шар $B(0, \delta_*)$, проходя через точку $x(T_1)$. Представим уравнение (15) в следующем виде:

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(T_1)x(t) + C(t)x(t) + B(t, x(t - \eta)); \quad (22)$$

$$C(t) = A(t) - A(T_1).$$

Тогда решение уравнения (22) при начальном условии $x(T_1)$ можно представить в виде

$$x(t) = e^{A(T_1)(t-T_1)}x(T_1) + \int_{T_1}^t e^{A(T_1)(t-s)}(C(s) + B(s, x(s - \eta)))ds. \quad (23)$$

Возьмем достаточно малый промежуток времени ΔT_2 такой, что при $T_1 \leq t \leq T_2 = T_1 + \Delta T_2$

$$\|A(t) - A(T_2)\| \leq \varepsilon_1 \|x(t)\|, \quad (24)$$

и предположим, что в течение этого промежутка времени значения функции $x(t)$ находятся вне шара $B(0, \delta_*)$, а значения $x(t - \eta)$ находятся внутри шара $B(0, \delta_*)$.

Переходя в (23) к нормам, имеем

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq e^{\Lambda(A(T_1))(t-T_1)} \|x(T_1)\| + \varepsilon_1 \int_{T_1}^t e^{\Lambda(A(T_1))(t-s)} \|x(s)\| ds + \\ &+ \int_{T_1}^t e^{\Lambda(A(T_1))(t-s)} \beta(s) \|x(s - \eta)\| ds \leq e^{\Lambda(A(T_1))(t-T_1)} \|x(T_1)\| + \\ &+ \int_{T_1}^t (\varepsilon_1 + \beta(s)) e^{\Lambda(A(T_1))(t-s)} \|x(s)\| ds. \end{aligned} \quad (25)$$

Здесь учтено то обстоятельство, что в промежутке времени $[T_1, T_1 + \Delta T_2]$ по предположению $\|x(s - \eta)\| \leq \|x(s)\|$.

Введем функцию

$$\varphi(t) = e^{-\Lambda(A(T_1))(t-T_1)} \|x(t)\|.$$

Тогда неравенство (25) представимо в виде

$$\varphi(t) = \varphi(T_1) + \int_{T_1}^t \beta_1(s) \varphi(s) ds, \quad (26)$$

где $\beta_1(s) = \varepsilon_1 + \beta(s)$.

Применяя к неравенству (26) лемму Гронуолла – Беллмана [12] и возвращаясь к нормам, имеем

$$\|x(t)\| \leq \exp \left\{ (\Lambda(A(T_1)) + \varepsilon_1)(t - T_1) + \int_{T_1}^t \beta(s) ds \right\} \|x(T_1)\|. \quad (27)$$

В предположении, что $\Lambda(A(T_1)) < 0$ и $\Lambda(A(T_1)) + \beta(T_1) < 0$, из неравенства (27) следует, что в момент времени T_1 траектория $x(t)$ не покидает шара $B(0, \delta_*)$.

Из полученного противоречия следует справедливость теоремы.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t, x(t - \eta)), \quad (28)$$

где $A(t, x) = (A_1(t, x), \dots, A_n(t, x))$, $x \in R_n$.

Будем считать, что при $-\eta \leq t \leq 0$ функция $x(t)$ равна

$$x(t) = \psi(t), -\eta \leq t \leq 0. \quad (29)$$

Положим

$$x(0) = x_0, \|x_0\| \leq \delta = \max_{-\eta \leq t \leq 0} |\psi(t)|. \quad (30)$$

Исследуем устойчивость решения задачи Коши (28), (30) при условии (29). Представим уравнение (28) в виде

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t, x(t)) + A(t, x(t - \eta)) - A(t, x(t)). \quad (31)$$

Пусть $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in R_n$, $\|\gamma\| \neq 0$, $T(t_0 \leq T < \infty)$ – фиксированный момент времени.

Введем матрицу $B(T, \gamma) = b_{ij}(T, \gamma)$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, элементы которой имеют вид

$$b_{ij}(T, \gamma) = \begin{cases} \alpha_{ij} \frac{A_i(T, \gamma_1, \dots, \gamma_{j-1}, \gamma_j, \gamma_{j+1}, \dots, \gamma_n)}{\gamma_j}, & \gamma_j \neq 0, \\ 0, & \gamma_j = 0, \end{cases}$$

где $\alpha_{ij} \geq 0$, причем $\alpha_{ij} = 0$, если $\gamma_j = 0$, и $\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} = 1$.

Замечание. Возможны и другие способы определения матрицы $B(T, \gamma)$. В частности, возможно следующее определение:

$$b_{ij}(T, \gamma) = \begin{cases} \alpha_{ij} \frac{A_i(T, 0, \dots, 0, \gamma_j, \gamma_{j+1}, \dots, \gamma_n) - A_i(T, 0, \dots, 0, \gamma_{j+1}, \dots, \gamma_n)}{\gamma_j}, & \gamma_j \neq 0, \\ 0, & \gamma_j = 0, \end{cases}$$

где на α_{ij} , $i, j = 1, 2, \dots, n$, налагаются те же условия, что и в предыдущей формуле.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 4. Пусть δ – достаточно малое положительное число, $A_i(t, 0) \equiv 0$, функции $A_i(t, u_1, \dots, u_n)$, $i = 1, 2, \dots, n$, непрерывны по всем аргументам,

$$\|A'_2(t, z)\| \leq L(t) \quad (32)$$

при $t \geq 0$, $z \in B(0, \delta)$, где $A'_2(t, z)$ означает производную Фреше по второй переменной.

Пусть функция $L(t)$ удовлетворяет одному из следующих условий:

1) функция $L(t)$ невозрастающая; 2) функция $L(t)$ непрерывная.

Пусть для любого γ , $0 < \|\gamma\| \leq \delta$, и для любого T , $0 \leq T < \infty$, выполнено условие

$$\Lambda(B(T, \gamma)) + 2L(T) < 0.$$

Тогда тривиальное решение системы уравнений (28) устойчиво.

Доказательство. Покажем, что при выполнении условий теоремы траектория $x(t, x_0)$ не покидает шара $B(0, \delta_1)$, $\delta_1 = 2\delta$. Предположим противное. Пусть в момент времени T траектория $x(t, x_0)$ достигает сферы $S(0, \delta_1)$ в точке $\gamma^* = (\gamma_1^*, \dots, \gamma_n^*)$ и в течение промежутка времени $t \in [T, T + \Delta T]$ выполняются неравенства $|x(t)| \geq \delta_1$, $|x(t - \eta)| < \delta_1$.

Система уравнений (28) эквивалентна следующей системе

$$\frac{dx(t)}{dt} = B(T, \gamma^*)x(t) + (A(t, x(t)) - B(T, \gamma^*)x(t)) + (A(t, x(t - \eta)) - A(t, x(t))). \quad (33)$$

Нетрудно видеть, что из непрерывности функций $A_i(t, u_1, \dots, u_n)$ по всем переменным следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой промежуток времени ΔT_1 ($\Delta T_1 \leq \Delta T$), что при $t \in [T, T + \Delta T_1]$

$$\|A(t, x(t)) - B(T, \gamma^*)x(t)\| \leq \varepsilon \|x(t)\|.$$

Из условия (32) следует, что при $x(t) \in B(0, \delta)$ и $t \in [T, T + \Delta T]$

$$\begin{aligned} & \|A(t, x(t - \eta)) - A(t, x(t))\| \leq \\ & \leq L(t) \|x(t - \eta) - x(t)\| \leq 2L(t) \|x(t)\|. \end{aligned}$$

Решение уравнения (33) при начальном условии $x(T) = \gamma^*$ имеет вид

$$x(t) = e^{B(T, \gamma^*)(t-T)} x(T) + \int_T^t e^{B(T, \gamma^*)(t-s)} \times \\ \times \left[\left(A(s, x(s)) - B(T, \gamma^*) x(s) \right) + \left(A(s, x(s-\eta)) - A(s, x(s)) \right) \right] ds.$$

Переходя к нормам, имеем при $t \in [T, T + \Delta T]$

$$\|x(t)\| \leq e^{\Lambda(B(T, \gamma^*))(t-T)} \|x(T)\| + \\ + \int_T^t e^{\Lambda(B(T, \gamma^*))(t-s)} (\epsilon + 2L(s)) \|x(s)\| ds. \quad (34)$$

В случае, если функция $L(t)$ невозрастающая, из последнего неравенства следует, что

$$\|x(t)\| \leq e^{\Lambda(B(T, \gamma^*))(t-T)} \|x(T)\| + \int_T^t e^{\Lambda(B(T, \gamma^*))(t-s)} (\epsilon + 2L(T)) \|x(s)\| ds. \quad (35)$$

В случае, если функция $L(t)$ непрерывна, для любого ϵ найдется такой промежуток времени ΔT_2 ($\Delta T_2 \leq \Delta T_1$), что при $t \in [T, T + \Delta T_2]$ справедливо неравенство $\|L(t) - L(T)\| \leq \epsilon$. Тогда неравенство (34) может быть усилено:

$$\|x(t)\| \leq e^{\Lambda(B(T, \gamma^*))(t-T)} \|x(T)\| + 2 \int_T^t e^{\Lambda(B(T, \gamma^*))(t-s)} (\epsilon + L(T)) \|x(s)\| ds. \quad (36)$$

В дальнейшем будем рассматривать неравенство (36), у которого правая часть больше, нежели у неравенства (35).

Введем функцию

$$\varphi(t) = e^{-\Lambda(B(T, \gamma^*))t} \|x(t)\|,$$

тогда

$$\varphi(t) \leq \varphi(T) + 2(\epsilon + L(T)) \int_T^t \varphi(s) ds. \quad (37)$$

Применяя к неравенству (37) неравенство Гронуолла – Беллмана и возвращаясь к нормам, имеем

$$\|x(t)\| \leq e^{(\Lambda(B(T, \gamma^*)) + 2\epsilon + 2L(T))(t-T)} \|x(T)\|. \quad (38)$$

Из неравенства (38) следует, что если выполняется неравенство

$$\Lambda(B(T, \gamma^*)) + 2L(T) < 0,$$

то найдется такой промежуток времени ΔT^* ($\Delta T^* \leq \Delta T_2$), что при $t \in (T, T + \Delta T^*]$ выполняется неравенство $\|x(t)\| < \|x(T)\|$. Получено противоречие, из которого следует справедливость теоремы.

Список литературы

1. **Красовский, Н. Н.** Некоторые задачи теории устойчивости движения / Н. Н. Красовский. – М. : ГИФМЛ, 1959. – 212 с.
2. **Беллман, Р.** Дифференциально-разностные уравнения / Р. Беллман, К. Л. Кук. – М. : Мир, 1967. – 548 с.
3. **Мышкис, А. Д.** Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом / А. Д. Мышкис. – М. : Наука, 1972. – 352 с.
4. **Резван, В.** Абсолютная устойчивость автоматических систем с запаздыванием / В. Резван. – М. : Наука, 1983. – 359 с.
5. **Виноград Р. Э.** Замечание о критическом случае устойчивости особой точки на плоскости // Доклады Академии Наук СССР, 1953. – Т. 101. – С. 209–212.
6. **Красовский, Н. Н.** Об устойчивости движения в критическом случае одного нулевого корня / Н. Н. Красовский // Математический сборник. – 1955. – Т. 37, № 1. – С. 83–88.
7. **Бойков И. В.** Об устойчивости решений дифференциальных и разностных уравнений в критических случаях // Доклады Академии Наук СССР. – 1990. – Т. 314, № 6. – С. 1298–1300.
8. **Бойков, И. В.** Об устойчивости решений дифференциальных и разностных уравнений с недифференцируемыми правыми частями / И. В. Бойков // Дифференциальные уравнения. – 1993. – Т. 29, № 8. – С. 1453–1455.
9. **Бойков, И. В.** Об устойчивости движения в одной системе с последействием / И. В. Бойков // Прикладная математика и механика. – 1997. – Т. 61, Вып. 3. – С. 398–402.
10. **Бойков, И. В.** Об устойчивости решений дифференциальных уравнений с последействием / И. В. Бойков // Дифференциальные уравнения. – 1998. – Т. 34, № 8. – С. 1134–1138.
11. **Бойков, И. В.** Устойчивость решений дифференциальных уравнений / И. В. Бойков. – Пенза : Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2008. – 244 с.
12. **Далецкий, Ю. А.** Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховых пространствах / Ю. А. Далецкий, М. Г. Крейн. – М. : Наука, 1970. – 534 с.

Бойков Илья Владимирович

доктор физико-математических наук,
профессор, заведующий кафедрой
высшей и прикладной математики,
Пензенский государственный университет

E-mail: math@pnzgu.ru

Boykov Ilya Vladimirovich

Doctor of physical and mathematical
sciences, professor, head of sub-department
of higher and applied mathematics,
Penza State University

УДК 517.91

Бойков, И. В.

Об одном критерии устойчивости решений нелинейных дифференциальных уравнений с последействием / И. В. Бойков // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2011. – № 1 (17). – С. 58–68.